

Занятие 3. Теория множеств

Теория

Множество — это совокупность различных объектов, называемых элементами множества

Пример: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\emptyset = \{\}$. \emptyset - пустое множество.

Мощность множества — количество элементов в множестве. Обозначается $|A|$.
Чему равна мощность множества A ? Чему равна мощность множества \emptyset ?

3 принадлежит множеству A : $3 \in A$

7 не принадлежит множеству A : $7 \notin A$

Подмножество — множество, состоящее только из элементов множества A . Обозначается $B \subseteq A$. Если $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то B - собственное подмножество множества A . Обозначается $B \subset A$.

Множество состоящее из всех подмножеств множества A называется множеством всех подмножеств множества A и обозначается 2^A . *Чему равна мощность множества 2^A ?*

Объединение множеств — множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B . Обозначается $A \cup B$.

Пересечение множеств — множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат и множеству A , и множеству B . Обозначается $A \cap B$.

Парадокс Рассела

Пусть A - множество всех множеств, которые не содержат самих себя. Тогда возникает вопрос: содержит ли A само себя? Если содержит, то по определению A не должно содержать себя. Если не содержит, то по определению A должно содержать себя. Таким образом, возникает противоречие.

Из-за наличия этого парадокса оригинальная теория множеств называется наивной теорией множеств. Для избежания парадоксов была создана аксиоматическая теория множеств.

Задания

1. $A = \{3, \text{яблоко}, \emptyset, \{3, 15\}\}$. Чему равна мощность множества A ? Чему равна мощность 2^A . Выпишите это множество явно. Чему равна мощность пересечения этого множества и множества всех песчинок на земле?
2. Для некоего множества A , чему равны результаты этих выражений: $A \cap \emptyset$, $A \cup \emptyset$, $A \cap A$, $A \cup A$?
3. Зная $|A|$, чему равна мощность множества 2^A ?
4. Зная $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$, чему равна мощность множества $A \cup B$?
5. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?
6. В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались не политыми?
7. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?
8. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно?
9. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

Домашнее задание

1. $A = \{3, 7, 15, \emptyset\}$, чему равно $|A|$, 2^A , $|2^A|$, $A \cap 2^A$, $A \cup 2^A$?
2. Известно, что $|A| = 5$, $|B| = 7$, $|A \cap B| = 3$. Чему равно $|A \cup B|$?
3. Известно, что $|A| = 5$, $|B| = 7$, $|C| = 6$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 4$, $|B \cap C| = 3$. Чему равно $|A \cup B \cup C|$?
4. Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств?