



ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ
РОССИЙСКИХ И
ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И
ОЛИМПИАД

- +7 495 650-99-95
- +7 495 694-36-00
- +7 925 505-24-42
- +7 916 151-25-94
- info@albioncom.ru

Занятие №2

Кружок по математике



Дерб

Давным-давно островитянин Дерб сказал своим друзьям: - Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец! Кем является Дерб — рыцарем или лжецом?

Решение: 1. Если сосед Дерба - рыцарь, тогда то, что он заявил Дербу, должно быть правдой, то есть он должен быть лжецом. Но мы предположили, что он рыцарь. Значит, такого не может быть. 2. Если сосед Дерба - лжец, то он сказал Дербу неправду, то есть неправда, что он лжец. Снова противоречие.

Итак, если бы сосед Дерба сказал ему, что он лжец, то в любом случае получилось бы противоречие, то есть, такого быть не могло. Вывод: сосед Дерба этого вообще не говорил! Значит, Дерб лжёт.

Честный Костя

Мальчик Костя говорит: “Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году уже будет 13”. Мальчик Костя честен. Как такое может быть?

Решение: Да, если день рождения Кости 31 декабря, а эту фразу он произнес 1 января.

Напитки и ёмкости

В чашке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в чашке; сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом; в банке не лимонад и не вода; стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Напитки и ёмкости

Решение:

	Чашка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	-	-	+	-
Лимонад	+		-	-
Квас			-	+
Вода	-	+		-

В чашке — лимонад, в стакане — вода,
в кувшине — молоко, в банке — квас.

Странная тетрадь

Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

"В этой тетради ровно одно неверное утверждение";

"В этой тетради ровно два неверных утверждения";

"В этой тетради ровно три неверных утверждения";

...

"В этой тетради ровно сто неверных утверждений".

Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

Три друга и три факультета

Три друга — Пётр, Роман и Сергей — учатся на математическом, физическом и химическом факультетах. Если Пётр математик, то Сергей не физик. Если Роман не физик, то Пётр математик. Если Сергей не математик, то Роман — химик. Сможете ли вы определить специальности каждого?

Второе занятие. Принцип Дирихле



Принцип Дирихле



Самая популярная формулировка принципа Дирихле такова:
«Если в n клетках сидит m зайцев, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца».



Принцип Дирихле



Дело в том, что в каждой конкретной задаче нелегко бывает понять, что же здесь «зайцы» и «клетки» и почему зайцев больше, чем клеток. Выбор зайцев и клеток часто неочевиден; далеко не всегда по виду задачи можно определить, что следует воспользоваться принципом Дирихле.



Кролики

А) 8 кроликов посадили в 7 клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере 2 кролика. Б) 50 кроликов посадили в 7 клеток. Докажите, что найдётся клетка, в которой оказалось не менее 8 кроликов.



Делим приз

За победу в турнире команда из 8 человек получила 12 конфет. Дети поделили конфеты между собой, не разламывая их. Определите, верны ли следующие утверждения:

- А) «кому-то досталось по крайней мере 2 конфеты»;
- Б) «кому-то досталось по крайней мере 3 конфеты»;
- В) «двум людям досталось по крайней мере две конфеты»;
- Г) «каждому досталась хотя бы одна конфета».

Финальный матч

На финальном матче школьного первенства по баскетболу команда 6А забила 9 мячей.

Докажите, что найдутся два игрока этой команды, забившие поровну мячей. (В команде было 5 игроков.)



Немного о прическах

В Москве проживает более 10 000 000 людей. На голове у каждого человека не может быть более 300 000 волос. Докажите, что наверняка найдутся 34 москвича с одинаковым числом волос на голове.

Друзья

Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.



**Дополнительная задача:* Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

Ковёр и моль

В ковре размером 4 x 4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1x1, не содержащий внутри дырок? (Дырки считаются точечными).

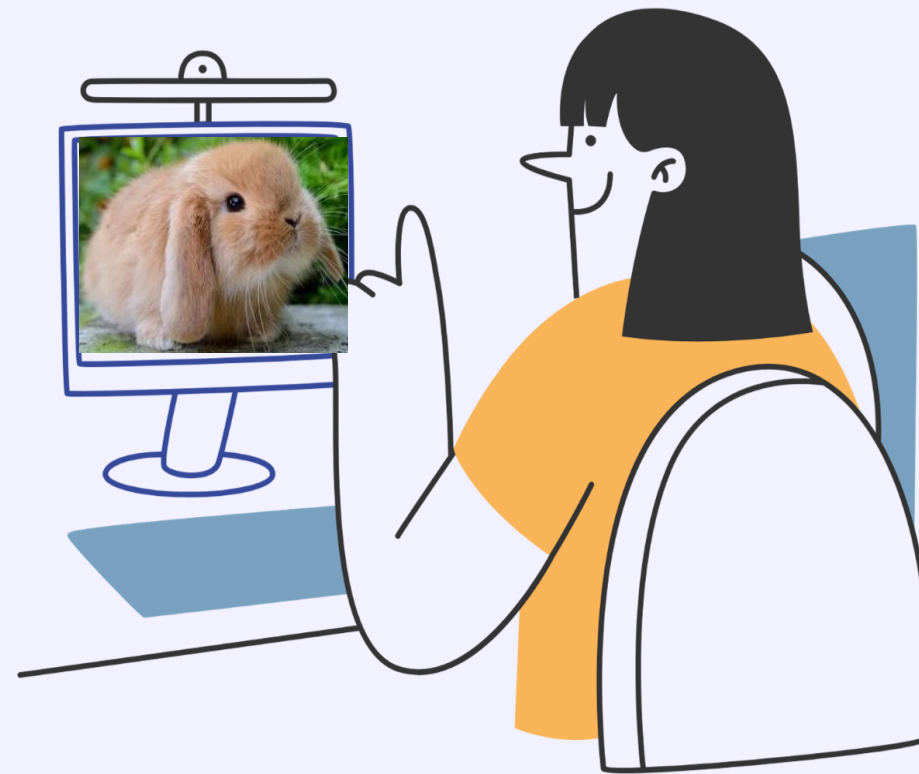


Спасибо за внимание!

Совсем скоро к вам на почту придёт домашнее задание

Не забудьте отправить его не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Если есть вопросы – пишите на почту shaulskaya.m@inbox.ru



Странная тетрадь

Решение: Заметим, что в тетради записано 100 утверждений, противоречащих друг друга, соответственно, если верное есть, то оно единственно. Соответственно, 99 ложных утверждений, а такое как раз есть - "В этой тетради ровно 99 неверных утверждений".

Три друга и три факультета

Решение: Предположим, что Роман действительно не физик, тогда Пётр математик (2 утв.). Но если Пётр математик, то Сергей не физик (1 утв.). Получается никто не физик – противоречие.

Тогда Роман - физик. Из 3 условия получаем, что Сергей – математик (иначе – Роман = химик - неверно), и, соответственно, Пётр – химик.

Кролики

Решение:

А) Предположим противное, что в каждой клетке меньше, чем 2 кролика – 0 или 1. Тогда наибольшее суммарное количество кроликов с 7 клеток – 7. Противоречие.

Б) Аналогично, предположим противное, тогда в каждой клетке не более 7 кроликов, тогда максимальное количество кроликов – $7*7 = 49$ – а у нас остался ещё один кролик. Противоречие.

Делим приз

Решение:

- А) Да, верно. Предположим противное, т.е. что существует ситуация, когда дети поделили конфеты так, что каждый получил 0 или 1 конфету. Тогда все дети в сумме получили не более 8 конфет, что противоречит условию. Значит наше предположение неверно, и такая ситуация существовать не может. Т. о. всегда найдётся тот, кто получил, по крайней мере, 2 конфеты. Для всех остальных пунктов можно построить пример, когда дети поделили 12 конфет так, что указанные утверждения не выполняются:
- Б) 4 человека получили по 2 конфеты, а остальные 4 по одной.
- В) Все конфеты забрал один человек.
- Г) Аналогично пункту 3.

Финальный матч

Решение: Предположим, что возможен случай, когда такие два игрока не найдутся. Тогда все пять игроков забили разное количество мячей. Пусть первый игрок ничего не забил, второй игрок забил один мяч, третий игрок забил два мяча, четвёртый — три, пятый — четыре. Тогда всего игроки забили десять мячей. Если же кто-то из игроков забил больше мячей, чем мы предположили, то и всего игроки забили больше мячей. Поскольку по условию игроки забили всего девять мячей, наше предположение неверно. Значит, существуют два игрока команды, забившие поровну мячей.

Немного о прическах

Решение: На голове может быть $0, 1, \dots, 300\,000$ волос — всего $300\,001$ вариантов. Каждого москвича отнесём к одной из $300\,001$ групп в зависимости от количества волос. Если 34 москвича с одинаковым количеством волос не найдутся, то это значит, что в любую из созданных групп входит не более 33 человек. Тогда всего в Москве живёт не более $33 \cdot 300\,001 = 9\,900\,033 < 10\,000\,000$ человек, что противоречит условию. Значит, такие 34 москвича обязательно найдутся.

Друзья

Решение: Предположим противное, что у каждого уникальное число друзей. Так как компания состоит из 5 человек, то у каждого имеется от 0 до 4 друзей. Поэтому если бы все имели различное число друзей, то в компании присутствовало бы по одному человеку, имеющему 0, 1, 2, 3, 4 друзей.

Тогда есть человек, который дружит со всеми (4 друга), но при этом присутствует тот, кто не дружит ни с кем (0 друзей) – противоречие.

Ковёр и моль

Решение: Разобьем ковер на 16 квадратов размером 1×1 . Так как дырок 15, то обязательно, по крайней мере, один квадрат 1×1 не будет иметь дырок внутри.

Использованные материалы

- Архив занятий Малого Мехмата МГУ <http://mmmf.msu.ru/archive/>
- Задачи с сайта <https://problems.ru/>